15-12-21 $\qquad$ 10η Διάλεξη

Θεώρημα. Έστω $R = \sup\{|x| : \sum_0^\infty a_k x^k$ συγκλίνει$\} \in [0, +\infty]$

Αν $R > 0$ τότε $\exists\ S : (-R,R) \to \mathbb{R}$ συνεχής τ.ω

(i) Η δυναμοσειρά συγκλίνει ομοιόμορφα στην S στο $[a,b]$ $\forall\ -R < a < b < R$

(ii) Αν $[a,b] \subseteq (-R,R)$ τότε $S'(x) = \sum_0^\infty a_k (x^k)'$

(iii) Αν $[a,b] \subseteq (-R,R)$ τότε $\int_a^b S(x)\,dx = \sum_0^\infty a_k \int_a^b x^k\,dx$.

Απόδειξη

(i) $S_n(x) := \sum_0^n a_k x^k$. Έστω ότι $\sum a_k x_0^k$ συγκλίνει και έστω $x \in \mathbb{R}$ τ.ω $|x| < |x_0|$ κ.ο με $x_0 \neq 0$

Θ.δ.ο $\sum_0^\infty |a_k x|^k$ συγκλίνει.

- $a_k x_0^k \xrightarrow{k\to\infty} 0 \Rightarrow \{a_k x_0^k\}_{k=1}^\infty$ φραγμένη $\Rightarrow$

$\exists\ c > 0$ τ.ω $|a_k x_0^k| < c$ $\forall\ k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$$\sum_0^n |a_k x^k| = \sum_0^n |a_k x_0^k| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \leq c \sum_0^n \left|\frac{x}{x_0}\right|^k$$

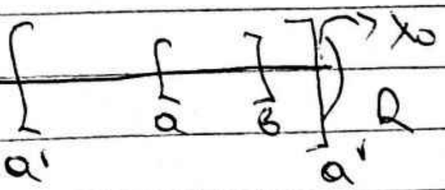
$\leq +\infty$ αφού η γεωμετρική σειρά συγκλίνει καθώς έχει $\left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$.

$\Rightarrow \exists\ M > 0$ τ.ω $\sum_0^n |a_k x^k| \leq M$ $\forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sum_0^\infty |a_k x^k|$ συγκλ. $\Rightarrow \sum_0^\infty a_k x^k$ συγκλίνει.

Θέτω $S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x)$ με $x \in (-R,R)$

Πρέπει ν.δ.ο ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη στο $[a,b] \subseteq (-R,R)$.



Θα πάρω ένα συμμε-
τρικό διάστημα $[a',a]$
που θα περιέχει το $[a,b]$ με $0<a<R$
Άρα, αρκεί ν.δ.ο $S_n \xrightarrow{ομ.} S$ στο $[-a',a']$
Είχαμε δείξει ότι αν $x_0 \in (a',R)$ τότε, $\exists c>0$
τ.ω $|a_k x_0^k| < c \ \forall k \in (\mathbb{N} \cup \{0\})$

$\Rightarrow \forall x \in (-a',a') \ |a_k x^k| = |a_k x_0^k| \left|\frac{x}{x_0}\right|^k \le$

$\le c \left|\frac{x}{x_0}\right| \le \left(\frac{a'}{|x_0|}\right)^k$ ① και η $\sum_0^\infty \left|\frac{a}{x_0}\right|^k$
συγκλίνει ②

① + ② $\xRightarrow{\text{weierstr}}$ $\sum_0^\infty a_k x^k$ συγκ. ομοιόμ. $\Rightarrow S_n \xrightarrow{ομ.} S$

$\xRightarrow{S_n \text{ συνεχής}}$ S συνεχής

(ii) $S_n(x) = \sum_{k=0}^n a_k x^k$ Θ.δ.ο η ακτίνα σύγκλ.

της δυναμοσειράς $\sum_{k=0}^\infty a_k (x^k)' = \sum_{k=0}^\infty k a_k x^{k-1}$
είναι(*) (ακριβώς) $\mathbb{R}$. Αρκεί
ν.δ.ο αν $x_0 \neq 0$ και $\sum_0^\infty a_k x_0^k$ συγκλίνει, τό-
τε για $|x|<|x_0|$, η $\sum_{k=1}^\infty k a_k x^{k-1}$ συγκλίνει

(*) τουλ.

$$\sum_{1}^{n} |k a_k x^{k-1}| = \sum_{1}^{n} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1} \overbrace{|a_k x_0|}^{\leq C}$$

$$\leq \sum_{1}^{n} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}.$$ Από Κρ. Λόγου έχω:

$$\frac{(k+1)\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k}}{k\left|\frac{x}{x_0}\right|^{k-1}} = \frac{k+1}{k}\left|\frac{x}{x_0}\right| \xrightarrow{k\to\infty} \left|\frac{x}{x_0}\right| < 1$$

$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} k \left|\frac{x}{x_0}\right|^{k}$ συγκ. $\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} |k a_k x^{k-1}|$ συγκ. $\Rightarrow$ $\sum^{\infty} k a_k x^{k-1}$ συγκλίνει.

Τώρα, θ.δ.ο η ακτίνα σύγκλισης είναι R

$\xRightarrow{(i)} \sum_{0}^{\infty} a_k (x^k)'$ συγκλ. ομοιόμορφα σε κάποια συνεχή $\tau(x)$ στο $[a,b]$. ① Αρκεί ν.δ.ο $S'(x) = \tau(x)$

① $\xRightarrow[a=-a']{b=a'} \sum_{0}^{\infty} a_k (x^k)' \overset{ομ}{=} \tau(x)$ στο $[-a', a']$ ($\forall a' < R$)

$$\xRightarrow{(iii)} \underbrace{\int_0^x \sum_{0}^{\infty} a_k (t^k)\, dt}_{\int_0^x \tau(t)dt} = \sum_{0}^{\infty} a_k \int_0^x (t^k)'\, dt$$

$= \sum a_k x^k = S(x)$, $x \in [-a', a'] \Rightarrow S' = \tau$ στο $(-R, R)$

iii) $S_n \xrightarrow[(i)]{ομ.} S$ στο $[a,b] \Rightarrow \int_a^b S_n \to \int_a^b S$

Όμως, $\int_a^b S_n = \sum_{0}^{n} a_k \int_a^b x^k\,dx \xrightarrow{φ\iota σ\iota κ ό ς}$

$\sum_{0}^{\infty} a_k \int_a^b x^k\,dx = \int_a^b S.$

(*) Στο $(-R, R)$ μπορώ να παραγωγίσω την σειρά όρο προς όρο όμως τότε δεν θα έχουμε απαραίτητως ομ. σύγκλ.

(*) Το ίδιο θεώρημα ισχύει ακόμα και αν κέντρο x_0

(*) Στην τάξη προηγήθηκε η απόδειξη του (iii) με ιδεοδοκείο

(*) Οι ακτίνες σύγκλισης την $\sum_0^\infty a_k x^k$, $\sum_0^\infty a_k (x^k)'$

$\sum_0^\infty a_k \int_0^x t^k dt$ είναι ίδιες.

Παραδείγματα

1) Σειρά McLaurin της e^x

$f(x) \sim \sum_0^\infty \frac{f^k(0)}{k!} x^k$ η σειρά McL. της e^x.

$\sum_0^\infty \frac{1}{k!} x^k = e^x \ \forall x \in \mathbb{R}$. Επίσης, $\sum_0^\infty \frac{1}{k!} e^{\cdot k} \overset{\text{ομ.}}{=} e^x$

στο $[a,b]$. Ερώτημα: Συγκλίνει στο $\mathbb{R}$;

Δλδ $\sum_0^\infty \frac{1}{n} e^{x} \overset{\text{ομ}}{=} e^x$;

Απάντηση: $S_n(x) = \sum_0^n \frac{1}{k!} e^{k}$, $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Αν

ναι τότε $\forall \varepsilon > 0 \ \exists n \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0 \ \forall x \in \mathbb{R}$,

$$\left| \sum_0^n \frac{1}{k!} x^k - e^x \right| = \left| \sum_{n+1}^\infty \frac{x^k}{k!} \right| < \varepsilon \quad \text{Έστω } \varepsilon = 1$$

Τότε, αν $x = n_0+1$ $\left| \sum_{k=n+1}^\infty \frac{x^k}{k!} \right| \geq \frac{x^{n+1}}{(n_0+1)!} = \frac{[(n_0+1)!]^{n_0+1}}{(n_0+1)!} > 1$

Άρα, η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομ. σε όλο το $\mathbb{R}$.

2) Σειρά Taylor της $\arctan x$;

Γνωρίζουμε $\operatorname{Arctan} x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2} dt$

$\frac{1}{1+t^2} \overset{-t^2=y}{=} \frac{1}{1-y}$ γεωμ. Σειρά $= \sum_0^\infty y^k =$

$= \sum_0^\infty (-1)^k t^{2k}$ όπου $|y|<1$ Άρα, ακτ. σύγ. $R=1$

$\Leftrightarrow |t|<1$

- Αν βάλω $t=\pm 1$ η σειρά αποκλίνει.
- Άρα, το διάστημα σύγ. της δυναμοσειράς είναι $(-1,1)$

Τώρα, απλώς θα ολοκληρώσω όρος προς όρο

$\Rightarrow \operatorname{Arctan} x = \int^x \sum_0^\infty (-1)^k t^{2k}\, dt =$

$\sum_0^\infty (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$ $\forall x \in (-1,1)$. (*) Από κριτήριο Leib. το ίδιο ισχύει για $x=\pm 1$

Άρα, το (*) ισχύει για κάθε $x \in [-1,1]$

Ισοσυνέχεια

(*) Θέλω το ίδιο δ για όλες τις οικογένειες

Ορισμός: Έστω (X,d) μ. Χ και $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ οικογένεια συνεχών συναρτήσεων. Έστω $x_0 \in X$. Η οικογένεια $\mathcal{A}$ ονομάζεται ισοσυνεχής στο $x_0 \in X$ αν $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, τ.ω. $\forall x \in X$ με $d(x,x_0)<\varepsilon$ ισχύει ότι $|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$ με f οποιοδήποτε στοιχείο $(\forall)$ της A. Αν $A=$μονοσύνολο, άλλά έχει μόνο 1 $f(x)$, ώστε ο ορισμός της ισοσυνέχειας είναι ίδιος με αυτόν της συνέχειας. Αν A ισοσυνεχής σε κάθε $x_0 \in X$ τότε είναι ισοσυνεχής γενικά.

(*) Σε μας συνήθως το A είναι άπειρο.

(*) Κάθε πεπερασμένη οικογ. συνεχών συναρτ. είναι ισοσυνεχής.

<u>Απόδειξη</u>

$A = \{f_1, \dots f_n\} \Rightarrow$ Αν $\varepsilon > 0$ $\exists \delta_i > 0$ τ.ω $\forall x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta_i$: $|f_i(x) - f_i(x_0)| < \varepsilon$, $i = 1, \dots, n$

Διαλέγω $\delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \Rightarrow A$ ισοσυν. στο x_0 $\forall x_0 \in X$.

<u>Θεώρημα (Arzela - Ascoli)</u>

Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ και $A \subseteq C(X)$ οικογ. Τ.Α.Ε.Ι: (i) το A είναι συμπαγές υποσύνολο ~~του~~ του $(C(X), D)$

(ii) το A κλειστό, φραγμένο (σε αυτόν τον χώρο) και ισοσυνεχές

<u>Πόρισμα:</u> Έστω (X, d) συμπαγής μ.χ και έστω $\{f_n\}$ μια ακολουθία συνεχών συν. από τον X. Αν $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμ. και ισοσυνεχής, τότε, έχει υπακολουθία που συγκλίνει ομοιόμορφα

($ii \Rightarrow i$) του θεωρήματος.

<u>Λήμμα</u>: Έστω $\mathcal{A} \subseteq C(X)$ με $C(X,d)$ συμπαγής, $\mathcal{A}$ φρ. και ισοσυν. Τότε $\bar{\mathcal{A}}$ φρ. & ισοσ.

<u>Απόδειξη Λήμματος</u>

- $\exists M>0$ τ.ω $\forall f \in \mathcal{A}$, $\|f\|_\infty \leq M$. Έστω $g \in \bar{\mathcal{A}} \Rightarrow$ $\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{A}$ τ.ω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} g$
$\Rightarrow \|g\|_\infty \leq \|f_n - g\|_\infty + \|f_n\|_\infty \leq \|f_n - g\|_\infty + M \xrightarrow{n\to\infty} M$

$\Rightarrow \forall g \in \bar{\mathcal{A}}$, $\|g\|_\infty \leq M \Rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ φραγμένη στον $(C(X), \|\cdot\|_\infty)$

- Έστω $\varepsilon > 0$, $x_0 \in X$. Τότε, $\exists \delta > 0$ $\forall x \in X$ με $d(x, x_0) < \delta$ να ισχύει $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon/3$
Έστω $g \in \bar{\mathcal{A}}$. Τότε, $\exists \{f_n\} \subseteq \mathcal{A}$ τ.ω $f_n \xrightarrow{\text{ομ}} f$

$\Rightarrow \sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| \to 0 \Rightarrow \exists n_0 \in \mathbb{N}$ τ.ω $\forall n \geq n_0$

$\sup_{x \in X} |f_n(x) - g(x)| < \varepsilon/3$. Τότε, $|g(x) - g(x_0)|$

$= |g(x) - f_n(x) + f_n(x) - f_n(x_0) + f_n(x_0) - g(x_0)|$

$\leq |g(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_n(x_0) - g(x_0)|$

$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon$ αν $d(x, x_0) < \delta$

$\Rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ ισοσυνεχής στο x_0, $\forall x_0 \in X \Rightarrow \bar{\mathcal{A}}$ ισοσυν.

<u>Απόδειξη Πορίσματος</u>

Θέτω $\mathcal{A} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$. Αφού $\mathcal{A}$ φρ. & ισοσ.

$\Rightarrow \overline{A}$ φρ. ⊕ ισοσυν. στον $(C(X), D) \xrightarrow[\text{Ascoli}]{\text{Arzela-}} \overline{A}$ συμπ.
στο $C(C(X), D) \Rightarrow$
για κάθε ακολουθία $\{\varphi_n\} \subseteq \overline{A}$ $\exists$ ομοιόμ. συγκ.
υπακολουθία της $\{\varphi_n\} \xRightarrow[\{f_n\} \subseteq \overline{A}]{} \{f_n\}$ έχει ομ.
συγ. υπακολουθία